

MUSTAQIL ISHLASH UCHUN MASALALAR

1-masala. Kasrli tenglamani butun ko'rinishga keltirish

Masala. Natural sonlarda yeching:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

Yechim:

Umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\frac{x + y}{x \cdot y} = \frac{1}{6}$$

Shundan:

$$6(x + y) = x \cdot y$$

Barchasini bir tomonga olib kelimiz:

$$x \cdot y - 6x - 6y = 0$$

Endi 36 ni qo'shib-ayiramiz ($6 \cdot 6$):

$$x \cdot y - 6x - 6y + 36 = 36$$

Chap tomonni faktorlash mumkin:

$$(x - 6)(y - 6) = 36$$

Endi x va y natural, demak $x - 6$ va $y - 6$ ham natural (yoki kamida musbat bo'luvchilarni olaylik).

36 ning musbat bo'luvchi juftliklari:

$$1 \cdot 36$$

$$2 \cdot 18$$

$$3 \cdot 12$$

$$4 \cdot 9$$

$$6 \cdot 6$$

Demak:

$$1. \ x - 6 = 1, y - 6 = 36 \rightarrow x = 7, y = 42$$

$$2. \ x - 6 = 2, y - 6 = 18 \rightarrow x = 8, y = 24$$

3. $x - 6 = 3, y - 6 = 12 \rightarrow x = 9, y = 18$
4. $x - 6 = 4, y - 6 = 9 \rightarrow x = 10, y = 15$
5. $x - 6 = 6, y - 6 = 6 \rightarrow x = 12, y = 12$

Va albatta juftliklarni almashtirsak ham yechim (chunki tenglama simmetrik):

Masalan (7,42) va (42,7), (8,24) va (24,8) va hokazo.

Javob:

Natural yechimlar (tartiblangan juftliklar):

(7,42), (42,7), (8,24), (24,8), (9,18), (18,9), (10,15), (15,10), (12,12).

2-masala. Kvadratlar farqi va bo'luvchilar

Masala. Butun sonlarda yeching:

$$x^2 - y^2 = 168$$

Yechim:

Chap tomonni faktorlash:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 168$$

Demak:

$$(x - y) \cdot (x + y) = 168$$

eNDI:

$$\begin{aligned} a &= x - y \\ b &= x + y \end{aligned}$$

u holda:

$$a \cdot b = 168$$

Va:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + b}{2} \\ y &= \frac{b - a}{2} \end{aligned}$$

x va y butun bo'lishi uchun a va b ning **bir xil paritetda** (ikkalasi ham juft yoki ikkalsi ham toq) bo'lishi kerak. 168 juft son, shuning uchun a va b juft bo'ladi (bir vaqtning o'zida toq bo'lishi mumkin emas, chunki toq·toq = toq).

Demak, a va $b - 168$ ning **juft bo'luvchi juftliklari**.

168 ni bo'luvchilarga ajratamiz:

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

Musbat bo'luvchilar (faqat juftlarini olamiz):

2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168

Har bir juftlik (a, b) uchun:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 168 \\ x &= \frac{a + b}{2} \\ y &= \frac{b - a}{2} \end{aligned}$$

Masalan:

1. $a = 2, b = 84$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 + 84}{2} = 43 \\ y &= \frac{84 - 2}{2} = 41 \end{aligned}$$

$$\text{Bundan: } 43^2 - 41^2 = (43 - 41)(43 + 41) = 2 \cdot 84 = 168$$

2. $a = 4, b = 42$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 + 42}{2} = 23 \\ y &= \frac{42 - 4}{2} = 19 \end{aligned}$$

$$23^2 - 19^2 = (23 - 19)(23 + 19) = 4 \cdot 42 = 168$$

Shu tarzda 168 ning **har bir juft bo'luvchi juftligi** yechim beradi. Manfiy a va b lar ham olib, yana yechimlar hosil qilsa bo'ladi (simmetriya sabab).

Umumiy javob:

168 ning har qanday juft bo'luvchi juftligi (a, b) uchun:

$$x = \frac{a + b}{2}$$

$$y = \frac{b - a}{2}$$

barcha butun yechimlarni beradi.

3-masala. Kvadrat va kvadrat orasida chiroyli “infinite descent”

Masala. Butun sonlarda yeching:

$$x^2 + 3 = 4y^2$$

1-qadam. Paritet tahlili

Tenglama:

$$x^2 + 3 = 4y^2$$

O'ng tomoni $4y^2$ juft, demak $x^2 + 3$ juft $\rightarrow x^2$ toq $\rightarrow x$ toq.

Demak:

$$x = 2k + 1$$

Qo'yamiz:

$$\begin{aligned}(2k + 1)^2 + 3 &= 4y^2 \\ 4k^2 + 4k + 1 + 3 &= 4y^2 \\ 4k^2 + 4k + 4 &= 4y^2 \\ 4(k^2 + k + 1) &= 4y^2\end{aligned}$$

Bo'lamiz:

$$k^2 + k + 1 = y^2$$

Demak yangi tenglama:

$$y^2 - k^2 - k = 1$$

Biroz tartibga keltiraylik:

$$y^2 = k^2 + k + 1$$

Bu yerda aniq yechimlarni topish unchalik oson emas, lekin dastlab kichik yechimlarni topamiz.

2-qadam. Kichik yechimlarni tekshirish

Asl tenglamaga qaytamiz:

$$x^2 + 3 = 4y^2$$

Kichik $|x|$ qiymatlar bilan:

$$x = 1:$$

$$1 + 3 = 4 \rightarrow 4y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

Yechim: $(x, y) = (1, 1)$ yoki $(1, -1)$

$$x = -1:$$

$$(-1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

Yechim: $(-1, 1), (-1, -1)$

Endi ko'ramiz: boshqa yechimlar mavjudmi?

3-qadam. Infinite descent g'oyasi

Faraz qilaylik, (x, y) nolga yaqin bo'lmagan, ya'ni $|x| > 1$ bo'lgan yechim bor.

Tenglama:

$$x^2 + 3 = 4y^2$$

Bu tenglamani qayta yozaylik:

$$4y^2 - x^2 = 3$$

$$(2y - x)(2y + x) = 3$$

Bu juda kuchli: 3 – tub son, demak $2y - x$ va $2y + x$ sonlari:

- butun
- bir-biriga juda yaqin (farqi $2x$)
- ko'paytmalari 3

3 ning bo'luvchi juftliklari:

$$1 \cdot 3, (-1) \cdot (-3)$$

Demak:

1. $2y - x = 1, 2y + x = 3$

y ehamiz: qo'shamiz: $4y = 4 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 2y - 1 = 1$

2. $2y - x = -1, 2y + x = -3$

Qo'shamiz: $4y = -4 \rightarrow y = -1 \rightarrow x = 2y + 1 = -1$

Ko‘rinib turibdi: **faqat** $(x, y) = (1, \pm 1), (-1, \pm 1)$ ga mos keladi.

Demak boshqa yechim yo‘q.

Javob:

Butun yechimlar:

$$(x, y) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1).$$

4-masala. Faqat trivial yechim: $x^2 + y^2 = 7z^2$

Masala. Butun sonlarda yechimlarni toping:

$$x^2 + y^2 = 7z^2$$

Maqsad:

Ko‘rsatamizki, faqat:

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

yechim bor (trivial).

1-qadam. Mod 7 bo‘yicha kvadratlar

Kvadratlar mod 7 bo‘yicha qoldiqlar:

$$0^2 = 0$$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9 \equiv 2$$

$$4^2 = 16 \equiv 2$$

$$5^2 = 25 \equiv 4$$

$$6^2 = 36 \equiv 1$$

Demak kvadrat sonlar mod 7 bo‘yicha faqat:

0, 1, 2, 4 ga teng bo‘ladi.

Shunga ko‘ra $x^2 + y^2 \pmod{7}$ bo‘yicha quyidagi qoldiqlarga ega bo‘lishi mumkin: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ba’zilar bir necha yo‘l bilan). Bizga $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{7}$ kerak (chunki $7z^2$ o‘ng tomonda).

Tekshirib chiqamiz $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{7}$ bo‘lishi mumkin bo‘lgan hollarda:

- $x^2 \equiv 0, y^2 \equiv 0$
- $x^2 \equiv 1, y^2 \equiv 6$ (lekin 6 kvadrat emas)
- $x^2 \equiv 2, y^2 \equiv 5$ (5 kvadrat emas)
- $x^2 \equiv 4, y^2 \equiv 3$ (3 kvadrat emas)

Demak yagona imkon:

$$x^2 \equiv 0 \pmod{7} \text{ va } y^2 \equiv 0 \pmod{7}$$

Bu esa:

$$7 \mid x \text{ va } 7 \mid y$$

degani.

Shunda $x = 7x_1, y = 7y_1$ deb yozamiz.

2-qadam. Z ham 7 ga bo‘linishini ko‘rsatamiz

Tenglamaga qo‘yamiz:

$$x^2 + y^2 = 7z^2$$

$$(7x_1)^2 + (7y_1)^2 = 7z^2$$

$$49x_1^2 + 49y_1^2 = 7z^2$$

$$7(7x_1^2 + 7y_1^2) = 7z^2$$

Bo‘lamiz:

$$7x_1^2 + 7y_1^2 = z^2$$

$$7(x_1^2 + y_1^2) = z^2$$

Demak z^2 7 ga bo‘linadi $\rightarrow z$ ham 7 ga bo‘linadi: $z = 7z_1$.

Natija:

Agar (x, y, z) yechim bo‘lsa, u holda x, y, z hammasi 7 ga bo‘linadi.

3-qadam. Cheksiz kamayish (infinite descent)

Endi faraz qilamizki, nolga teng bo‘lmagan yechim bor. Ularning ichidan:

$x^2 + y^2 + z^2$ minimal bo‘lgan (nolga teng bo‘lmagan) yechimni tanlaymiz.

Lekin yuqoridagi natijaga ko‘ra, bu yechimda x, y, z hammasi 7 ga bo‘linadi.

Demak:

$$x = 7x_1, y = 7y_1, z = 7z_1$$

va (x_1, y_1, z_1) ham yechim:

$$x_1^2 + y_1^2 = 7z_1^2$$

Bundan:

$$x^{12} + y^{12} + z^{12} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{49}$$

ya'ni bundan ham kichik nolga teng bo'lmagan yechim topildi – bu "eng kichik yechim" degan farazga zid.

Demak, asl faraz noto'g'ri – **nolga teng bo'lmagan yechim yo'q.**

Javob:

Yagona butun yechim:

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

5-masala. Kvadratlarning yig'indisi: $x^2 + y^2 = 65$

Masala. Butun sonlarda yeching:

$$x^2 + y^2 = 65$$

1-qadam. Baholash

65 musbat, x^2 va y^2 ham musbat yoki 0.

Demak:

$$x^2 \leq 65, y^2 \leq 65$$

Shundan:

$$|x| \leq 8 \text{ (chunki } 9^2 = 81 > 65)$$

$$|y| \leq 8$$

Endi 0 dan 8 gacha bo'lgan kvadratlar:

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64

Ular yig'indisi 65 bo'lishi kerak.

Tekshiramiz juftliklarni:

1. $64 + 1 = 65 \rightarrow (x^2, y^2) = (64, 1) \text{ yoki } (1, 64)$
2. $49 + 16 = 65 \rightarrow (x^2, y^2) = (49, 16) \text{ yoki } (16, 49)$

Boshqa kvadratlar kombinatsiyasidan 65 chiqmaydi.

Demak:

1. $x^2 = 64, y^2 = 1$
 $x = \pm 8, y = \pm 1$
2. $x^2 = 49, y^2 = 16$
 $x = \pm 7, y = \pm 4$

Bunda har bir kvadrat juftligi uchun barcha ishoralar kombinatsiyasini olish mumkin.

Yechimlar:

$(8, 1), (8, -1), (-8, 1), (-8, -1)$
 $(1, 8), (1, -8), (-1, 8), (-1, -8)$
 $(7, 4), (7, -4), (-7, 4), (-7, -4)$
 $(4, 7), (4, -7), (-4, 7), (-4, -7)$

Javob: yuqoridagi 16 ta butun yechim.