

DIOFANT TENGLAMALARI

Olimpiada masalalari uchun metodik qo'llanma (o'qituvchilar uchun)

Diofant tenglama nima?

Ta'rif

Diofant tenglama – noma'lumlari faqat butun sonlardan iborat bo'lishi talab etiladigan tenglama.

Oddiy tenglamalarda yechimlar haqiqiy yoki ratsional sonlar bo'lishi mumkin, diofant tenglamalarda esa sharti aniq yoziladi:

“ x va y – butun sonlar bo'lsin”

“ x, y, z – natural sonlar bo'lsin”

“ x, y – musbat butun sonlar bo'lsin” va hokazo.

Misollar:

1. $2x + 3y = 7$
2. $x^2 + y^2 = z^2$
3. $xy = 12$
4. $x^3 - y^2 = 1$

Bu tenglamalarni yechganda faqat butun yechimlar qiziqtiradi.

Didaktik maqsad (o'qituvchi uchun)

Diofant tenglamalar mavzusini o'qitish orqali quyidagi maqsadlarga erishiladi:

o'quvchilarda sonlar xossalarini chuqurroq tushunish;

bo'linish, ekub (gcd), ekuk (lcm) tushunchalarini mustahkamlash;

mantiqiy fikrlash va “bo'lishi mumkin / bo'lishi mumkin emas” tipidagi isbotlarni rivojlantirish;

olimpiada masalalariga kirishda tayanch baza yaratish.

Metodik tavsiya: Dars boshida o'quvchilarga oddiy misollar bilan farqni ko'rsatish foydali $2x = 5$ tenglamaning haqiqiy sonlarda yechimi bor, lekin butun sonlarda yo'q. $2x = 6$ tenglamaning butun sonlarda ham yechimi bor: $x = 3$.

Shundan keyin savol:

Qachon tenglama butun sonli yechimga ega bo'ladi?

Bu savol butun mavzuni ochish uchun motivatsiya bo'lib xizmat qiladi.

Chiziqli diofant tenglamalar

Umumiy ko'rinish

Ikki noma'lumli chiziqli diofant tenglama umumiy ko'rinishda:

$$a x + b y = c$$

bu yerda a, b, c – berilgan butun sonlar; x va y – butun noma'lumlar.

Masalan:

$$6x + 9y = 3$$

$$5x - 7y = 1$$

$$4x + 6y = 5$$

va hokazo.

Yechim mavjudlik sharti

Bu juda muhim nazariy fakt:

Diofant tenglama

$$a x + b y = c$$

butun yechimga ega bo'ladi, agar va faqat agar: $EKUB(a, b) \mid c$ ga bo'linadi.

Qisqa yozish: $EKUB(a, b) \mid c$

1-misol.

$$6x + 9y = 3$$

$EKUB(6, 9) = 3$, 3 soni 3 ga bo'linadi $\rightarrow$ tenglama yechimga ega.

2-misol.

$$6x + 9y = 5$$

$EKUB(6, 9) = 3$, lekin 5 soni 3 ga bo'linmaydi $\rightarrow$ tenglama butun yechimga ega emas.

Yechish algoritmi (o'qituvchi uchun bosqichma-bosqich)

Umumiy tenglama: $a x + b y = c$

1-bosqich. $d = \text{EKUB}(a, b)$ ni topish.

2-bosqich. Agar $d \nmid c$ ga bo'linmasa $\rightarrow$ "Butun yechim yo'q" degan xulosa.

3-bosqich. Agar $d \mid c$ ga bo'lsa, tenglamani soddalashtirish:

$$ax + by = c$$

ni

$$\left(\frac{a}{d}\right)x + \left(\frac{b}{d}\right)y = \frac{c}{d}$$

ko'rinishga keltiramiz (bu yerda o'ng tomonda endi ekub 1 bo'ladi).

4-bosqich. $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = 1$ tenglamaning bitta xususiy yechimini topamiz. Buning uchun kengaytirilgan Evklid algoritmidan foydalanish mumkin, yoki tajribaviy yo'l bilan (kichik koeffitsiyentlarda) sinab topish mumkin.

5-bosqich. Agar (x_0, y_0) bitta yechim bo'lsa, umumiy yechim formulasi:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \frac{b}{d}t \\y &= y_0 - \frac{a}{d}t\end{aligned}$$

bu yerda t – ixtiyoriy butun son.

Misol: to'liq yechim chiqarish

Masala. $6x + 9y = 3$ diofant tenglamasining barcha butun yechimlarini toping.

1. $\text{EKUB}(6, 9) = 3$, 3 soni 3 ga bo'linadi $\rightarrow$ yechim bor.
2. Tenglamani 3 ga bo'lib soddalashtiramiz:

$$\begin{aligned}6x + 9y &= 3 \\2x + 3y &= 1\end{aligned}$$

Endi $2x + 3y = 1$ tenglamani yechamiz.

3. Bitta yechimni topamiz. Masalan, sinab ko'ramiz:

Agar $x = -1$ bo'lsa:

$$\begin{aligned}2 \cdot (-1) + 3y &= 1 \\-2 + 3y &= 1 \\3y &= 3 \\y &= 1\end{aligned}$$

Demak, bitta yechim: $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

4. Bu yerda $a = 6, b = 9, d = 3$.

Umumiy formula:

$$x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = -1 + \frac{9}{3} \cdot t = -1 + 3t$$
$$y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t = 1 - \frac{6}{3} \cdot t = 1 - 2t$$

Yechim:

$$x = -1 + 3t$$
$$y = 1 - 2t$$

bu yerda t – ixtiyoriy butun son.

Metodik izoh:

- 1) O‘quvchilarga alohida ta’kidlang: bitta yechim topish – hammasi emas, umumiy ko‘rinishni yozish kerak.
- 2) t ning har bir butun qiymati yangi yechim beradi. Masalan, $t = 0, 1, 2, -1$, va hokazo.

Darsda ishlatiladigan tipik mashqlar

O‘qituvchi uchun 3 darajali mashqlar tavsiya etiladi:

1-daraja (maktab olimpiadasi boshlang‘ich):

- a) $4x + 6y = 2$
- b) $5x + 10y = 15$
- c) $7x - 14y = 21$

2-daraja (tuman, litsey darajasi):

- a) $15x + 21y = 6$
- b) $8x + 12y = 14$ (yechim yo‘q ekanini ko‘rsatish)
- c) $9x - 4y = 1$

3-daraja (olimpiada uchun):

- a) $17x + 5y = 1$ (imkon qadar kichik natural yechimlarni topish)
- b) $12x + 35y = 1$ (Fakt: koeffitsiyentlar katta bo‘lganda Evklid algoritmini o‘rgatish)

Har bir masaladan so‘ng savol berish foydali:

“Bu tenglama yechimga egaligi qaysi bosqichda tekshirildi?”

“Agar o‘ng tomondagi son o‘zgarsa, masalan $15x + 21y = 7$ bo‘lganida nima bo‘lardi?”

Bir o‘zgaruvchili va ko‘paytmali tenglamalar

Bir o‘zgaruvchili tenglamalar: $ax = b$

Eng oddiy diofant tenglama ko‘rinishi:

$$ax = b$$

Bu yerda x – butun son.

Yechim mavjudlik sharti juda sodda:

Tenglama butun yechimga ega bo‘ladi, agar a soni b ga bo‘linadi.

Agar a b ga bo‘linmasa, butun yechim yo‘q.

Misol:

$3x = 12 \rightarrow x = 4$ (butun yechim bor).

$3x = 13 \rightarrow$ butun yechim yo‘q, chunki 13 soni 3 ga bo‘linmaydi.

Metodik izoh:

Bu ko‘rinish ko‘pincha murakkabroq tenglamalarni yechishda ichki qadam sifatida keladi. O‘quvchilarni “butun son” so‘ziga alohida e‘tibor qaratishga o‘rgatish kerak.

Ko‘paytmali tenglamalar: $xy = n$

Umumiy ko‘rinish:

$$xy = n$$

Bu yerda x va y – butun yoki natural sonlar (shartga qarab).

Yechish g‘oyasi:

n sonining barcha bo‘luvchilarini (faktorlarini) topamiz;

Har bir bo‘luvchi juftligi $\left(d, \frac{n}{d}\right)$ bitta yechimni beradi.

Agar natural sonlar so‘ralsa, musbat bo‘luvchilar;
butun sonlar so‘ralsa, manfiy bo‘luvchilar ham olinadi.

Misol:

$xy = 12$, x va y – natural sonlar.

12 ning musbat bo‘luvchilari: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Juftliklar: (1, 12), (2, 6), (3, 4)

Yechimlar:

$$x = 1, y = 12$$

$$x = 2, y = 6$$

$$x = 3, y = 4$$

va ularning o‘rin almashganlari ($x = 12, y = 1$) va hokazo, agar tartib ham hisobga olinsa.

Agar x, y – butun sonlar bo‘lsa, manfiy juftliklar ham qo‘shiladi:

(-1, -12), (-2, -6), (-3, -4) va hokazo.

Metodik izoh: Bu turdagi masalalar orqali:

o‘quvchilarda sonni ko‘paytuvchilarga ajratish ko‘nikmasi mustahkamlanadi;

“bo‘luvchi-juftlik” tushunchasi shakllanadi;

keyinchalik “bo‘linish, ekub, ekuk” mavzulariga tayanch bo‘ladi.

Mustaqil ishlash uchun misollar:

1. Natural sonlarda yeching: $xy = 18$
2. Butun sonlarda yeching: $xy = -12$
3. Natural sonlarda yeching: $x y = 30$, va $x \leq y$ shartini qo‘shib, faqat tartiblangan juftliklarni yozish.

Kvadrat va yuqori darajali diofant tenglamalar**Pifagor tenglamasi $x^2 + y^2 = z^2$**

Bu juda mashhur diofant tenglama. Yechimlar “Pifagor uchliklari” deb ataladi.

Misol: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

Demak (3, 4, 5) – Pifagor uchligi.

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

Demak (5, 12, 13) – Pifagor uchligi.

4.2. Pifagor uchliklarini hosil qilish formulasi

Agar m va n – natural sonlar bo‘lib, $m > n$, $EKUB(m, n) = 1$, m va n dan biri juft, ikkinchisi toq bo‘lsa, u holda quyidagi formulalar bo‘yicha Pifagor uchligi hosil bo‘ladi:

$$\begin{aligned}x &= m^2 - n^2 \\y &= 2mn \\z &= m^2 + n^2\end{aligned}$$

Bu yerda x, y, z – natural sonlar va $x^2 + y^2 = z^2$ bajariladi.

Misol:

$$m = 2, n = 1$$

$$\begin{aligned}x &= 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \\y &= 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \\z &= 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5\end{aligned}$$

Demak (3, 4, 5) – Pifagor uchligi.

$$m = 3, n = 2$$

$$\begin{aligned}x &= 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \\y &= 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \\z &= 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13\end{aligned}$$

Demak (5, 12, 13) – Pifagor uchligi.

Metodik izoh: Avval o‘quvchilarga bir nechta tayyor uchliklarni (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17) misol sifatida bering. Keyin savol bering: “Bu uchliklar tasodifmi yoki qonuniyat bormi?” Shundan keyin m va n yordamida formula kiritiladi.

Oddiy mashqlar

1. Pifagor uchligi ekani tekshiring:

- a) (6, 8, 10)
- b) (7, 24, 25)
- c) (9, 12, 15)

2. m va n yordamida Pifagor uchligini hosil qiling:

- a) $m = 4, n = 1$
- b) $m = 4, n = 3$

$$c) m = 5, n = 2$$

3. Natural sonlarda yeching:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Qoldiq (modul) usuli va yechimga ega emasligini isbotlash

Qoldiq arifmetikasi diofant tenglamalarda juda kuchli qurol. Ko‘pincha u yechim yo‘qligini isbotlash uchun ishlatiladi.

Tipik fakt: kvadratlar mod 4 bo‘yicha

Har qanday butun n uchun:

n^2 qoldig‘i mod 4 bo‘yicha 0 yoki 1 bo‘ladi.

Ya’ni:

$$n^2 \equiv 0 \pmod{4} \text{ yoki } n^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

Buni ikki holatda ko‘rsatish mumkin:

$$\text{Agar } n \text{ juft bo'lsa, } n = 2k, n^2 = 4k^2 \rightarrow \text{qoldiq } 0$$

$$\text{Agar } n \text{ toq bo'lsa, } n = 2k + 1, n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \rightarrow \text{qoldiq } 1$$

Natija: Kvadrat sonlar hech qachon $4k + 2$ yoki $4k + 3$ ko‘rinishida bo‘lmaydi.

Yechelim yo‘qligini isbotlash misoli

Masala. Butun sonlarda yechim yo‘qligini isbotlang:

$$x^2 + y^2 = 3$$

Isbot:

Kvadratlar mod 4 bo‘yicha faqat 0 yoki 1 bo‘lishi mumkin.

Demak x^2 va y^2 har biri 0 yoki 1 qoldiq beradi:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

Hech qaysi holatda ham 3 qoldiq chiqmaydi.

Demak, $x^2 + y^2$ soni mod 4 bo'yicha 3 bo'la olmaydi.

Lekin tenglama $x^2 + y^2 = 3$ bu son 3 ekanini talab qilmoqda.

Bu esa mod 4 bo'yicha imkonsiz.

Shuning uchun $x^2 + y^2 = 3$ diofant tenglamasining butun yechimi yo'q.

Metodik izoh: Bu usul o'quvchilarga "qoldiq bo'yicha fikrlash"ni o'rgatadi.

Bunday masalalarda "yechish" emas, balki "yechim yo'qligini isbotlash" maqsad bo'ladi.

Mustaqil mashqlar

1. Butun sonlarda yechim yo'qligini isbotlang:

$$x^2 + y^2 = 6$$

2. Isbotlang: $x^2 \equiv 0$ yoki $1 \pmod{8}$.
(Shu natijadan foydalanib, $x^2 = 2y$ tenglama butun sonlarda yechimga ega emasligini ko'rsating.)
3. Isbotlang: har qanday butun n uchun $n^2 - n$ soni doimo juft bo'ladi.
(Ishora: mod 2 bo'yicha qarang.)

Baholash (tengsizlik) usuli bilan chegaralash

Ba'zi diofant tenglamalarda noma'lumlar sonini chegaralash kerak bo'ladi. Bunda oddiy baholash usuli ishlatiladi.

Masala. Natural sonlarda yeching:

$$x^2 + y^2 = 20$$

Isbot va yechim: x^2 va y^2 musbat yoki 0.

Birinchidan, $x^2 \leq 20$ va $y^2 \leq 20$. Natural sonlarda $x^2 \geq 1, y^2 \geq 1$.

x^2 mumkin bo'lgan qiymatlar: 1, 4, 9, 16

y^2 mumkin bo'lgan qiymatlar: 1, 4, 9, 16

Endi juftliklarni tekshiramiz:

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 4 = 5$$

$$1 + 9 = 10$$

$$1 + 16 = 17$$

$$4 + 4 = 8$$

$$4 + 9 = 13$$

$$4 + 16 = 20 \rightarrow (x^2, y^2) = (4, 16) \text{ yoki } (16, 4)$$

$$9 + 9 = 18$$

$$9 + 16 = 25$$

Demak, faqat ikki holatda 20 hosil bo'ladi:

$$x^2 = 4, y^2 = 16 \rightarrow (x, y) = (2, 4) \text{ yoki } (x, y) = (-2, 4) \text{ va hokazo (agar butun bo'lsa)}$$

$$x^2 = 16, y^2 = 4 \rightarrow (x, y) = (4, 2), \text{ va hokazo.}$$

Agar natural sonlarda desak:

Yechimlar: $(2, 4), (4, 2)$.

Metodik izoh:

Baholash usuli yordamida noma'lumlar diapazonini juda kichik qilib olish mumkin. Shundan keyin oddiy tekshirish orqali yechimlar aniqlanadi.

Aralash va olimpiada darajasidagi masalalar

Quyida har xil usullarni birlashtirgan 2–3 tipik masala keltiriladi.

1-masala.

Natural sonlarda yeching: $2x + 3y = 17$

Yechim:

1. EKUB(2, 3) = 1, 1 soni 17 ga bo'linadi $\rightarrow$ yechim bor.
2. Bitta yechim topamiz.
Masalan, $x = 2$ deb ko'ramiz:

$$2 \cdot 2 + 3y = 17$$

$$4 + 3y = 17$$

$$3y = 13 \rightarrow y$$

butun emas.

$x = 1$ deb ko'ramiz:

$$2 \cdot 1 + 3y = 17$$

$$\begin{aligned}2 + 3y &= 17 \\3y &= 15 \\y &= 5\end{aligned}$$

Demak, bitta yechim: $x_0 = 1, y_0 = 5$ (butun sonlarda).

3. Umumiy yechim:

$$\begin{aligned}x &= 1 + 3t \\y &= 5 - 2t\end{aligned}$$

(t – butun son)

4. Endi natural sonlar shartini qo'yamiz:

$$x > 0, y > 0$$

$$\begin{aligned}x = 1 + 3t > 0 &\rightarrow 3t > -1 \rightarrow t \geq 0 \text{ (butun sonlar ichida } t \geq 0) \\y = 5 - 2t > 0 &\rightarrow 5 > 2t \rightarrow t < 2.5 \rightarrow t \leq 2\end{aligned}$$

Demak $t = 0, 1, 2$ bo'lishi mumkin.

$$\begin{aligned}t = 0 &\rightarrow x = 1, y = 5 \\t = 1 &\rightarrow x = 4, y = 3 \\t = 2 &\rightarrow x = 7, y = 1\end{aligned}$$

Yechimlar natural sonlarda:

(1, 5), (4, 3), (7, 1).

2-masala. Butun sonlarda yeching $x^2 + y^2 = 50$

Baholash: $x^2 \leq 50, y^2 \leq 50$

Mumkin bo'lgan kvadratlar: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

Juftliklar: $1 + 49 = 50 \rightarrow (1, 49) \rightarrow (x, y) =$

$(1, 7), (-1, 7), (1, -7), (-1, -7)$

$25 + 25 = 50 \rightarrow (25, 25) \rightarrow (x, y) = (5, 5), (5, -5), (-5, 5), (-5, -5)$

Boshqa kombinatsiyalardan 50 hosil bo'lmaydi.

Yechimlar: (1, 7), (-1, 7), (1, -7), (-1, -7), (5, 5), (5, -5), (-5, 5), (-5, -5).

Metodik eslatma:

O'quvchilardan kvadratlar jadvalini yodlashni emas, balki mantiqan hosil qilishni talab qiling.

“Qanday qilib tekshirishlar sonini kam qildik?” degan savol bilan baholash usulini mustahkamlang.

3-masala.

Butun sonlarda yeching:

$$x^3 - x = 6y$$

Yechim g‘oyasi:

Chap tomonni guruhlaymiz:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

Demak:

$$x(x - 1)(x + 1) = 6y$$

Endi $x - 1, x, x + 1$ ketma-ket uchta butun son. Uchta ketma-ket butun son ko‘paytmasi har doim 6 ga bo‘linadi.

Shuning uchun:

$x(x - 1)(x + 1)$ doimo $6k$ ko‘rinishida bo‘ladi (k – butun son).

Demak, har qanday butun x uchun $y = k$ butun son bo‘ladi.

Xulosa:

Tenglama $x^3 - x = 6y$ har qanday butun x uchun butun y ga ega:

$$y = \frac{x(x - 1)(x + 1)}{6}$$

Bu yerda y ning butun bo‘lishini yuqoridagi mulohaza kafolatlaydi.

Metodik izoh:

Bu masala o‘quvchiga “har qanday butun x uchun yechim bor” degan naqshni ko‘rsatadi.

Guruhlash, ketma-ket sonlar, bo‘linish kabi tushunchalarni birlashtiradi.

Metodik tavsiyalar va tipik xatolar

Tavsiyalar

1. Mavzuni oddiy misollardan boshlang: $ax = b, xy = n$.
2. Keyin chiziqli tenglamalar $ax + by = c$ ga o'ting.
3. So'ng kvadrat va yuqori darajali tenglamalarni ko'rsating.
4. Qoldiq (modul) usuli va baholash usulini alohida darslarda sekin-asta kiriting.

Har bir tur uchun kamida: 1 ta nazariy misol (to'liq izoh bilan), 3–5 ta mustaqil mashq (oddiy), 1–2 ta olimpiada darajali masala berib boring.

O'quvchilarning tili bilan so'rashingiz mumkin: "Bunda nega aynan ekub tekshiriladi?", "Nega mod 4 da ko'rdik, mod 3 emas?", "Bu tenglama yechimga ega emasligini qanday isbotlaymiz?"

Bu savollar ularda mantiqiy fikrlashni kuchaytiradi.

Tipik xatolar

1. Yechim mavjudlik shartini tekshirmasdan hisoblashni boshlash.
2. "Bitta yechim topish" bilan cheklanib, umumiy yechimni yozmaslik.
3. Natural va butun sonlarni adashtirish (masalan, manfiy yechimlarni natural deb yozish).
4. Qoldiq bo'yicha isbotlarda barcha holatlarni ko'rib chiqmaslik.
5. Baholash usulida noma'lumlar oralig'ini yetarlicha tor qilmaslik, natijada ortiqcha tekshirishlar.

O'qituvchiga tavsiya:

Har bir dars oxirida o'quvchilardan:

"Bugun qanday yangi usulni o'rganding?"

"Bu usul qaysi masalalarda qo'l keladi?"

degan savollarga qisqa yozma javob so'ralsa, mavzu yaxshi mustahkamlanadi.