

1-masala.

5 ta o'quvchi bor. Ular 1,2,3,4,5 raqamlangan stullarga tasodifiy o'tirishadi. Necha xil joylashda hech bir o'quvchi o'z raqamidagi stulga tushmaydi?

Yechim

Bu "hech kim o'z joyida emas" masalasi – derangement deyiladi. D_5 ni topamiz.

Umumiy o'rin almashtirishlar soni: $5! = 120$.

A_i – i -chi o'quvchi o'z joyida o'tirgan holatlar to'plami.

Inkluziya-eksklyuziya formulasini ishlatamiz:

$$\begin{aligned} D_5 &= 5! \\ &- C(5,1) \cdot 4! \\ &+ C(5,2) \cdot 3! \\ &- C(5,3) \cdot 2! \\ &+ C(5,4) \cdot 1! \\ &- C(5,5) \cdot 0! \end{aligned}$$

Hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} 5! &= 120 \\ C(5,1) \cdot 4! &= 5 \cdot 24 = 120 \\ C(5,2) \cdot 3! &= 10 \cdot 6 = 60 \\ C(5,3) \cdot 2! &= 10 \cdot 2 = 20 \\ C(5,4) \cdot 1! &= 5 \cdot 1 = 5 \\ C(5,5) \cdot 0! &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Demak:

$$\begin{aligned} D_5 &= 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 \\ D_5 &= 44 \end{aligned}$$

Javob: 44 ta joylash.

2-masala.

Uzunligi 10 bo'lgan 0 va 1 lardan iborat ketma-ketliklarda "111" uchramasin. Necha shunday ketma-ketlik bor?

Yechim

$f(n)$ – uzunligi n bo'lgan, ichida "111" bo'lmagan ketma-ketliklar soni.

Oxiriga qarab uchta hol:

Oxiri 0 bilan tugasa: soni $A(n)$

Oxiri 10 bilan tugasa: soni $B(n)$

Oxiri 110 bilan tugasa: soni $C(n)$

E'tibor ber: "111" yo'qligi uchun oxiri 1 bilan tugasa, undan oldingi 2 ta belgi nazorat ostida bo'ladi.

1. $A(n)$: oxiri 0 bilan tugaydigan barcha ketma-ketliklar. Oldingi $n-1$ ta belgida faqat "111" bo'lmasin:

$$A(n) = f(n-1)$$

2. $B(n)$: oxiri 10 bilan tugaydigan ketma-ketliklar. Undan oldingi $n-2$ ta belgi istalgan $f(n-2)$:

$$B(n) = f(n-2)$$

3. $C(n)$: oxiri 110 bo'lsa, undan oldingi $n-3$ ta belgi istalgan $f(n-3)$:

$$C(n) = f(n-3)$$

Demak:

$$\begin{aligned} f(n) &= A(n) + B(n) + C(n) \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) \end{aligned}$$

Endi boshlang'ich qiymatlar kerak.

$$n = 1:$$

$$0,1 \rightarrow f(1) = 2$$

$$n = 2:$$

$$00,01,10,11 \rightarrow f(2) = 4$$

$$n = 3:$$

barchasi: 8 ta

"111" bo'lgan 1 ta holni chiqarib tashlaymiz:

$$f(3) = 7$$

Endi rekursiya:

$$\begin{aligned} f(4) &= f(3) + f(2) + f(1) = 7 + 4 + 2 = 13 \\ f(5) &= f(4) + f(3) + f(2) = 13 + 7 + 4 = 24 \\ f(6) &= 24 + 13 + 7 = 44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(7) &= 44 + 24 + 13 = 81 \\
 f(8) &= 81 + 44 + 24 = 149 \\
 f(9) &= 149 + 81 + 44 = 274 \\
 f(10) &= 274 + 149 + 81 = 504
 \end{aligned}$$

Javob: 504 ta ketma-ketlik.

3-masala.

Alifbo: $\{A, B, C, D\}$. Uzunligi 6 bo'lgan satrlar tuziladi (har bir pozitsiyaga A,B,C,D dan biri qo'yiladi). Har bir satrda A, B, C, D har biri kamida bir marta qatnashadigan satrlar sonini toping.

Yechim

Jami cheklovsiz satrlar soni:

$$4^6$$

Inkluziya-eksklyuziya ishlatamiz.

A – A yo'q

B – B yo'q

C – C yo'q

D – D yo'q

$|A|$: A qatnashmasa, faqat B, C, D dan tanlanadi $\rightarrow 3^6$

Shu kabi $|B|, |C|, |D|$ ham 3^6

Jami:

$$C(4,1) \cdot 3^6 = 4 \cdot 3^6$$

Ikki harf qatnashmasa: masalan A va B yo'q $\rightarrow$ faqat C, D $\rightarrow 2^6$

Bunday juftliklar soni: $C(4,2) = 6$

Jami:

$$6 \cdot 2^6$$

Uch harf qatnashmasa: masalan A, B, C yo'q $\rightarrow$ faqat D $\rightarrow 1^6 = 1$

Bunday uchliklar soni: $C(4,3) = 4$

Jami:

$$4 \cdot 1$$

To'rtala harf ham "qatnashmasin" degan hol yo'q (0).

Endi inkluziya-eksklyuziya:

kerakli satrlar soni = $4^6 - 4 \cdot 3^6$

$$\bullet 6 \cdot 2^6$$

$$- 4 \cdot 1$$

Javob: $4^6 - 4 \cdot 3^6 + 6 \cdot 2^6 - 4$

4-masala.

Raqamlar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 dan foydalanib, raqamlari turli bo'lgan 7 xonali sonlar tuziladi. Nechta son 5 ga bo'linadigan bo'ladi?

(Esda tut: 5 ga bo'linish uchun oxiri 0 yoki 5.)

Yechim

Ikki holat:

1. Oxiri 0 bilan tugaydi.
2. Oxiri 5 bilan tugaydi.

Har ikki holatda raqamlar takrorlanmaydi.

1-holat: oxiri 0

So'nggi raqam: 0 (1 ta usul).

Qolgan 6 raqamni {1,2,3,4,5,6,7,8,9} dan tanlaymiz (9 ta raqam, barchasi farqli, 6 tasini joylashtiramiz).

6 xonali "boshi" uchun:

$$P(9,6) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

Demak 1-holat soni: $P(9,6)$.

2-holat: oxiri 5

So'nggi raqam: 5.

Birinchi raqam 0 bo'lishi mumkin emas (son 0 bilan boshlanmaydi).

Qolgan raqamlar to'plami: {0,1,2,3,4,6,7,8,9} (9 ta raqam).

1-xona uchun: 8 ta variant (0 dan tashqari 8 ta raqam).

Qolgan 5 pozitsiyaga qolgan 8 ta raqamdan 5 tasini joylashtiramiz:

$$P(8,5) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

Demak 2-holat soni:

$$8 \cdot P(8,5)$$

Umumiy son:

$$P(9,6) + 8 \cdot P(8,5)$$

5-masala.

4 ta er-xotin (8 kishi) dumaloq stol atrofida shunday joylashadi-ki, hech bir juftlik yonma-yon o'tirmasin. Necha xil joylash mavjud?

(Er-xotinning o'zaro tartibi muhim, stolda aylantirish bir xil hisoblanadi.)

Yechim (inklyuziya-eksklyuziya)

Aylana bo'yicha 8 kishini joylashtirish: $(8 - 1)! = 7!$

E_i – i -juftlik yonma-yon o'tirgan joylashlar to'plami.

Bizga kerak: $7! - |E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4|$

Hisob oson bo'lishi uchun sxematik ko'rsatamiz:

$|E_i|$: i – juftlikni blok deb olamiz (2 kishilik blok).

Blok + qolgan 6 kishi = 7 obyekt.

Aylana bo'yicha joylashtirish: $6!$

Blok ichida $2!$ usul.

Shuning uchun:

$$|E_i| = 2! \cdot 6!$$

4 ta juftlik:

$$\sum |E_i| = 4 \cdot 2! \cdot 6!$$

$|E_i \cap E_j|$: 2 juftlik yonma-yon. Har ikkisi alohida blok: 2 ta blok + 4 kishi $\rightarrow$ 6 obyekt.

Joylashtirish: $5!$

Har blok ichida $2!$ usul $\rightarrow (2!)^2$

$C(4,2) = 6$ juftlik tanlansa:

$$\sum \sum |E_i \cap E_j| = C(4,2) \cdot (2!)^2 \cdot 5!$$

Uchta juftlik yonma-yon, to'rttasi yonma-yon hollar ham hisoblanishi kerak; ammo bu masala ancha texnik, ko'pincha olimpiadada yechim sxemasi yoki aniq son emas, balki metodik yondashuv so'raladi.

6-masala.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$,
bu yerda $0 \leq x_i \leq 6$ ($i = 1, \dots, 5$).

Yechimlar sonini toping.

Yechim

Avval chegarasiz (faqat $x_i \geq 0$) yechimlarni olamiz:

$$C(20 + 5 - 1, 5 - 1) = C(24, 4)$$

Endi cheklovni ($x_i \leq 6$) hisobga olamiz.

“yomon” yechimlar: hech bo'lmaganda bitta $x_i \geq 7$.

yangi o'zgaruvchi:

A_i - $x_i \geq 7$ bo'lgan yechimlar to'plami.

Inkluziya-eksklyuziya:

Yaxshi = jami - ($|A_1| + \dots + |A_5|$) + ($|A_i \cap A_j|$) - ...

$|A_1|$ ni hisoblaymiz:

$x_1 \geq 7$ bo'lsa, $x_1 = 7 + y_1, y_1 \geq 0$

Tenglama:

$$\begin{aligned} (7 + y_1) + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 20 \\ y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 13 \end{aligned}$$

Bu yerda hammasi ≥ 0 .

Yechimlar soni:

$$C(13 + 5 - 1, 5 - 1) = C(17, 4)$$

Simmetriya sababli $|A_i|$ hammasi bir xil:

$$\sum |A_i| = 5 \cdot C(17, 4)$$

Endi $|A_i \cap A_j|$: $x_i \geq 7$ va $x_j \geq 7$.

Masalan, $x_1 = 7 + y_1, x_2 = 7 + y_2$:

$$\begin{aligned}(7 + y_1) + (7 + y_2) + x_3 + x_4 + x_5 &= 20 \\ y_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 6\end{aligned}$$

Bunda hammasi ≥ 0 :

yechimlar soni:

$$C(6 + 5 - 1, 5 - 1) = C(10, 4)$$

$C(5, 2)$ ta juftlik bor:

$$\sum \sum |A_i \cap A_j| = C(5, 2) \cdot C(10, 4)$$

Uchta $x_i \geq 7$ bo'lishi mumkin emas, chunki uchta 7 allaqachon 21 bo'ladi, tenglama o'ng tomoni 20 – mumkin emas.

Shuning uchun yuqoridagi uchinchi kesishmalar nol.

Demak, yaxshi yechimlar soni:

$$C(24, 4) - 5 \cdot C(17, 4) + C(5, 2) \cdot C(10, 4)$$

Javob shu formula ko'rinishida qoldiriladi.

7-masala.

Isbotlang: istalgan $n + 1$ ta butun sondan iborat to'plamda doim shunday ikki son topiladiki, ularning ayirmasi n ga bo'linadi.

Yechim

$n + 1$ ta butun son berilgan: $a_1, a_2, \dots, a_{\{n+1\}}$.

Har bir a_i ni n ga bo'lgan qoldiq bilan bog'laymiz. Qoldiqlar:

$0, 1, 2, \dots, n - 1$ – jami n ta qoldiq sinfi.

$n + 1$ ta sonni n ta qoldiq sinfiga joylashtiramiz.

Dirixle printsipi bo'yicha:

kamida ikkita son bir xil qoldiqqa ega:

$$a_i \equiv a_j \pmod{n}$$

Bu:

$$a_i - a_j \equiv 0 \pmod{n}$$

ya'ni $a_i - a_j n$ ga bo'linadi.

Isbot tugadi.

8-masala.

Isbotlang:

$$C(n, 0) + C(n, 2) + C(n, 4) + \dots = 2^{n-1}$$

(ya'ni n qatordagi $C(n, k)$ ning juft indeksli yig'indisi 2^{n-1} ga teng.)

Yechim

Binom formulasi:

$$(1 + 1)^n = \sum C(n, k) \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum C(n, k) = 2^n$$

$$(1 - 1)^n = \sum C(n, k) \cdot 1^{n-k} \cdot (-1)^k$$

Bu 0 ga teng ($n \geq 1$).

Demak:

$$0 = C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - C(n, 3) + \dots$$

Endi:

$$S_{juft} = C(n, 0) + C(n, 2) + C(n, 4) + \dots$$

$$S_{toq} = C(n, 1) + C(n, 3) + \dots$$

Biz bilamiz:

$$S_{juft} + S_{toq} = 2^n$$

$$S_{juft} - S_{toq} = 0$$

Ikki tenglamani qo'shamiz:

$$2 \cdot S_{juft} = 2^n$$

$$S_{juft} = 2^{n-1}$$

Isbotlandi.

9-masala.

k ta belgidan tashkil topgan alifbo bo'lsin. Ularning biri – A . Uzunligi n bo'lgan va kamida bitta A ishtirok etadigan satrlar sonini toping.

Yechim

Har bir pozitsiyada k ta variant $\rightarrow$ jami satr:

$$k^n$$

“ A qatnashmagan” satrlar:

har bir pozitsiyada faqat $k - 1$ ta boshqa belgi bo'lishi mumkin $\rightarrow (k - 1)^n$

Demak, kamida bitta A qatnashgan satrlar:

$$k^n - (k - 1)^n$$

Javob: $k^n - (k - 1)^n$

10-masala.

10 ta teng bo'lakka bo'lingan tort bor. Har bir bo'lak uchta do'stga: Ali, Behruz va Dilshodga beriladi. Har bir bo'lak aynan bittasiga tegadi. Har uchalasi ham tortdan kamida bitta bo'lak olishi shart. Tortni necha xil usulda taqsimlash mumkin?

Yechim

Har bir bo'lak 3 kishidan biriga tegadi $\rightarrow$ cheklovsiz taqsimlash:

$$3^{10}$$

Endi “yomon” holatlarni chiqarib tashlaymiz: hech bo'lmaganda bittasi hech narsa olmaydi.

A – Ali hech narsa olmaydi

B – Behruz hech narsa olmaydi

D – Dilshod hech narsa olmaydi

$|A|$: 10 bo'lak faqat B yoki D ga beriladi $\rightarrow 2^{10}$

xuddi shunday $|B|, |D|$ ham 2^{10}

$$\sum |A| = 3 \cdot 2^{10}$$

$|A \cap B|$: Ali ham, Behruz ham olmaydi $\rightarrow$ hammasi Dilshodga ketadi $\rightarrow 2^{10} = 1$
 Shu kabi har juftlik uchun 1. $C(3,2) = 3$ juftlik bor:

$$\sum \sum |A \cap B| = 3 \cdot 1$$

Uchchovi bir vaqtning o'zida "hech narsa olmasin" degan hol yo'q (tort bo'sh qololmaydi).

Inkluziya-eksklyuziya:

Kerakli taqsimlar soni =

$$2^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 1$$

Javob: $2^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3$