

KO'RSATKICHLI TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR

1. Ko'rsatkichli tenglamalar turlari

Ko'rsatkichli tenglama — noma'lum ko'rsatkichda qatnashgan tenglama, masalan:

$$\begin{aligned}a^x &= b \\ a^{f(x)} &= a^{g(x)} \\ a^x + a^{-x} &= c \\ a^x &= b^x \\ a^x &= c \cdot b^x\end{aligned}$$

Olimpiada masalalarida ko'pincha tenglama:

- 📖 asoslarni bir xil qilish,
- 📖 logarifmlash,
- 📖 almashtirish,
- 📖 funksiyalar kesishishini tahlil qilish

orqali yechiladi.

2. Ko'rsatkichli tenglamalarni yechishning asosiy usullari

1) Asoslarni tenglashtirish

Agar:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

va $a > 0, a \neq 1$ bo'lsa, u holda:

$$f(x) = g(x)$$

Bu eng tez va samarali usul.

2) Almashtirish

Masalan, a^x va a^{-x} birga qatnashsa:

$$t = a^x (t > 0)$$

almashtirish kiritilib, tenglama oddiy algebraik tenglamaga keltiriladi.

3) Logarifmlash

Agar:

$$a^x = b$$

bo'lsa:

$$x = \log_a b$$

Olimpiadada logarifmlash usuli ko'pincha:

- 📖 asoslar turlicha bo'lsa,
- 📖 ko'rsatkichlar murakkab bo'lsa

ishlatiladi.

4) Grafik fikrlash va monotonlik

Tenglama:

$$a^{f(x)} = g(x)$$

ko'rinishda bo'lsa, $f(x)$ va $g(x)$ ning o'zaro joylashuvi, monotoniya, eng kichik yoki eng katta qiymatlar tahlil qilinadi.

1.5. Ko'rsatkichli tengsizliklar turlari

Ko'rsatkichli tengsizliklarda asosiy holatlar:

1. $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$
2. $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$
3. $a^{f(x)} \geq b$
4. $a^x + a^{-x} \geq c$

Bunday masalalarda asosning ($a > 1$ yoki $0 < a < 1$) ekanligi juda muhim.

1.6. Ko'rsatkichli tengsizliklarni yechish prinsiplari

Agar $a > 1$ bo'lsa:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Agar $0 < a < 1$ bo'lsa:

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$

Tengsizlik belgisi **teskari** bo'lishi — ko'p uchraydigan tipik xatolardan biri. Shuning uchun har safar:

- 📖 asos > 1 mi?

📖 yoki $0 < a < 1$ mi?

degan savol albatta tekshiriladi.

1.7. Olimpiada masalalarida keng qo'llanadigan g'oyalar

Ko'rsatkichli masalalarda olimpiadaga xos yondashuvlar:

- 📖 Baholash: $a^x + a^{-x} \geq 2$ (AM–GM)
- 📖 Simmetriya: a^x va a^{-x} birga kelganda $t + 1/t$ ko'rinishi
- 📖 Funktsiyalar usuli: $f(x) = a^x$ ning monotoniya va qavariqligi
- 📖 Parametr: ko'rsatkichli tenglamalarda parametr bo'yicha yechimlar soni
- 📖 Logarifmga o'tish: asoslar har xil bo'lsa

Xulosa

Ko'rsatkichli tenglama va tengsizliklar mavzusi olimpiada algebra bo'limining markaziy mavzularidan biri bo'lib, u ko'rsatkichli funksiyaning asosiy xossalari, monotonligi, almashtirish va baholash usullariga tayangan holda yechiladi. Ushbu mavzuni chuqur o'zlashtirish o'quvchini murakkab tenglama-tengsizliklarni tahlil qilishga va mantiqiy yechim strategiyasini tanlashga o'rgatadi.

2. Metodik yordam

(Ko'rsatkichli tenglama va tengsizliklarni olimpiadaga yo'naltirib o'qitish)

2.1. O'qitishda asosiy metodik yondashuv

Ko'rsatkichli masalalarda o'quvchi quyidagi **uch tayanch savol**ni avtomatik berishga odatlanishi kerak:

1. **Asos qanday?** ($a > 1$ yoki $0 < a < 1$)
2. **Asoslarni tenglashtirish mumkinmi?**
3. **Monotonlikdan foydalanish mumkinmi?**

Olimpiada masalalarida ko'pincha formulani to'g'ridan-to'g'ri qo'llash emas, balki **to'g'ri g'oyani tanlash** muhimroq bo'ladi.

2.2. Asosiy usullarni o'rgatish ketma-ketligi

1. **Asoslarni bir xil qilish**

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \rightarrow f(x) = g(x)$$

2. Almashtirish kiritish

a^x va a^{-x} birga qatnashsa, $t = a^x (t > 0)$

3. Baholash usuli

$$a^x + a^{-x} \geq 2 (a > 0)$$

4. Monotonlik orqali tengsizlik yechish

Asos > 1 yoki $0 < \text{asos} < 1$ holatini alohida tekshirish

5. Grafik fikrlash

a^x ning o'suvchi/kamayuvchi ekanini tasavvur qilish

2.3. Tipik metodik xatolar

- $a > 1$ va $0 < a < 1$ holatlarini aralashtirib yuborish;
- tengsizlikda belgini teskari o'zgartirmaslik;
- $t = a^x$ almashtirishda $t > 0$ shartini unutish;
- $a = 1$ holatini tekshirmasdan qabul qilish;
- logarifmlashdan keyin cheklovlarni yozmaslik.

Bu xatolarni kamaytirish uchun **har bir yechimda “nima uchun bu usul?”** degan savolga javob berish talab qilinadi.

2.4. Oddiy darajadagi misollar (5 ta)

1-misol

Tenglamani yeching:

$$2^x = 8$$

Yechish:

$8 = 2^3$, demak:

$$2^x = 2^3 \rightarrow x = 3.$$

Javob: $x = 3$

2-misol

Tenglamani yeching:

$$5^x = 1$$

Yechish:

$a^x = 1$ bo'lishi uchun $x = 0 (a \neq 1)$.

Javob: $x = 0$

3-misol

Tenglamani yeching:

$$3^{x-1} = 9$$

Yechish:

$9 = 3^2$, shuning uchun:

$$3^{x-1} = 3^2 \rightarrow x - 1 = 2 \rightarrow x = 3.$$

Javob: $x = 3$

4-misol

Tengsizlikni yeching:

$$2^x \geq 1$$

Yechish:

$2 > 1$, funksiya o'suvchi.

$$2^x \geq 2^0 \rightarrow x \geq 0.$$

Javob: $x \geq 0$

5-misol

Tengsizlikni yeching:

$$(1/2)^x \leq 1$$

Yechish:

$0 < 1/2 < 1$, funksiya kamayuvchi.

$$(1/2)^x \leq (1/2)^0 \rightarrow x \geq 0.$$

Javob: $x \geq 0$

2.5. O'rta darajadagi misollar (5 ta)

1-misol

Tenglamani yeching:

$$4^x = 2^{x+2}$$

Yechish:

$4 = 2^2$, shuning uchun:

$$2^{2x} = 2^{x+2}$$

$$2x = x + 2$$

$$x = 2.$$

Javob: $x = 2$

2-misol

Tenglamani yeching:

$$3^x + 3^{-x} = 10/3$$

Yechish:

$t = 3^x$ ($t > 0$) deb olamiz.

$$t + 1/t = 10/3$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$t = 3 \text{ yoki } t = 1/3$$

Demak:

$$3^x = 3 \rightarrow x = 1$$

$$3^x = 1/3 \rightarrow x = -1$$

Javob: $x = -1, 1$

3-misol

Tengsizlikni yeching:

$$2^{x+1} > 8$$

Yechish:

$8 = 2^3$, asos > 1 .

$$2^{x+1} > 2^3 \rightarrow x + 1 > 3 \rightarrow x > 2.$$

Javob: $x > 2$

4-misol

Tenglamani yeching:

$$5^{2x} = 25$$

Yechish:

$$25 = 5^2.$$

$$5^{2x} = 5^2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1.$$

Javob: $x = 1$

5-misol

Tengsizlikni yeching:

$$(1/3)^{2x-1} \geq (1/3)^2$$

Yechish:

$0 < 1/3 < 1$, funksiya kamayuvchi.

$$2x - 1 \leq 2$$

$$\begin{aligned}2x &\leq 3 \\ x &\leq 3/2.\end{aligned}$$

Javob: $x \leq 3/2$