

## Koshi tengsizligi va uning tadbiqlari

### 1. Koshi tengsizligining umumiy mazmuni

Koshi tengsizligi (to'liq nomi: **Koshi–Bunyakovskiy–Shvarts tengsizligi**) matematikaning algebra, analiz va geometriya bo'limlarida keng qo'llaniladigan asosiy tengsizliklardan biridir. Ushbu tengsizlik ikki to'plam sonlar orasidagi bog'lanishni baholash imkonini beradi va murakkab ifodalarni soddalashtirishda muhim vosita hisoblanadi.

### 2. Koshi tengsizligining asosiy ko'rinishi

Ixtiyoriy haqiqiy sonlar  $a_1, a_2, \dots, a_n$  va  $b_1, b_2, \dots, b_n$  uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Bu tengsizlik **Koshi tengsizligi** deb ataladi.

#### Tenglik holati

Tenglik faqat va faqat quyidagi shart bajarilganda yuz beradi:

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots = a_n/b_n \quad (b_i \neq 0 \text{ bo'lganda})$$

ya'ni  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  va  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  ketma-ketliklar **proportsional** bo'lsa.

### 3. Ikki o'zgaruvchili xususiy hol

$a$  va  $b, x$  va  $y$  haqiqiy sonlar bo'lsa, Koshi tengsizligi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2)$$

Bu ko'rinish olimpiada masalalarida eng ko'p uchraydi va ko'pincha baholash usuli sifatida qo'llanadi.

### 4. Koshi tengsizligining muhim tadbiqlari

#### 4.1. Ifodalarni baholash

Koshi tengsizligi yordamida murakkab algebraik ifodaning eng katta yoki eng kichik qiymatini topish mumkin.

Masalan,  $a^2 + b^2 = 1$  shart ostida  
 $a + b$  ifodaning maksimal qiymatini topish.

Yechim g'oyasi:

$$(a \cdot 1 + b \cdot 1)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (1^2 + 1^2)$$

$$(a + b)^2 \leq 1 \cdot 2 = 2$$

$$a + b \leq \sqrt{2}$$

## 4.2. Tengsizliklarni isbotlash

Ko'plab olimpiada masalalarida talab etiladigan tengsizliklar Koshi tengsizligining to'g'ridan-to'g'ri yoki o'zgartirilgan ko'rinishlari orqali isbotlanadi.

Masalan, ijobiy  $a, b, c$  sonlar uchun:

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bu tengsizlik Koshi tengsizligini  
 $(a, b, c)$  va  $(1, 1, 1)$  ketma-ketliklariga qo'llash orqali olinadi.

## 4.3. Kasrli ifodalar bilan ishlash

Koshi tengsizligi quyidagi ko'rinishda ham keng qo'llanadi:

$$\begin{aligned} (a_1^2/x_1 + a_2^2/x_2 + \dots + a_n^2/x_n) \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \end{aligned}$$

(bu yerda  $x_i > 0$ )

Bu ko'rinish olimpiadalarda **kasrli tengsizliklarni** isbotlashda juda samarali.

## Metodik yordam

### 1. Mavzuni o'qitishda asosiy yondashuv

O'quvchilarga Koshi tengsizligi:

📖 faqat formula emas;

📖 balki **baholash va isbotlash vositasi** ekanligi tushuntirilishi zarur.

Avval 2 ta o'zgaruvchili holat, keyin umumiy  $n$  ta o'zgaruvchili ko'rinishga o'tilishi tavsiya etiladi.

### 2. O'quvchilarda shakllantirilishi kerak bo'lgan ko'nikmalar

O'quvchi:

- 📖 qaysi ifodaga Koshi tengsizligini qo'llash mumkinligini aniqlay olishi;
- 📖 tenglik holatini tekshira bilishi;
- 📖 tengsizlikni mexanik emas,  **mantiqan**  qo'llay olishi kerak.

### 3. Olimpiadaga tayyorlashda e'tibor beriladigan jihatlar

Har bir masalada **qaysi ketma-ketliklar tanlanayotganini** izohlash

- 📖 Tenglik holatini albatta tekshirtirish
- 📖 Bir masalaga **bir nechta yondashuv** mavjudligini ko'rsatish

### 4. Tavsiya etiladigan mashq turlari

- 📖 qiymat topishga oid masalalar
- 📖 tengsizlik isbotlash
- 📖 parametrli masalalar
- 📖 boshqa tengsizliklar (AM–GM, Yensen) bilan solishtirish

### Xulosa

Koshi tengsizligi olimpiada matematikasining tayanch tushunchalaridan biri bo'lib, uni chuqur o'zlashtirgan o'quvchi tengsizliklarga oid masalalarda katta ustunlikka ega bo'ladi. O'qituvchining to'g'ri metodik yondashuvi ushbu mavzuning samarali o'zlashtirilishini ta'minlaydi.

Quyida oson va o'rta darajadi misollar keltirilgan.

#### 1-misol

Agar  $a^2 + b^2 = 1$  bo'lsa,  $a + b$  ning eng katta qiymatini toping.

#### Yechish

Koshi tengsizligini  $(a, b)$  va  $(1, 1)$  juftliklariga qo'llaymiz:

$$(a \cdot 1 + b \cdot 1)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (1^2 + 1^2)$$

$$(a + b)^2 \leq 1 \cdot 2$$

$$(a + b)^2 \leq 2$$

Shundan:

$$a + b \leq \sqrt{2}$$

#### Javob

$a + b$  ning eng katta qiymati  $\sqrt{2}$  ga teng.

## 2-misol

Isbotlang:

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

### Isbot

Koshi tengsizligini  $(a, b)$  va  $(1, 1)$  uchun yozamiz:

$$(a \cdot 1 + b \cdot 1)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (1^2 + 1^2)$$

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

Bu talab etilgan tengsizlikdir.

### Xulosa

Tengsizlik to'g'ri isbotlandi.

## 3-misol

Agar  $a^2 + b^2 = 5$  bo'lsa,  $3a + 4b$  ifodaning maksimal qiymatini toping.

### Yechish

Koshi tengsizligini  $(a, b)$  va  $(3, 4)$  uchun qo'llaymiz:

$$(3a + 4b)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (3^2 + 4^2)$$

$$(3a + 4b)^2 \leq 5 \cdot 25$$

$$(3a + 4b)^2 \leq 125$$

Shundan:

$$3a + 4b \leq \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

### Javob

Maksimal qiymat  $5\sqrt{5}$  ga teng.

## 4-misol

Isbotlang:

$$a^2 + b^2 \geq (a + b)^2/2$$

### Isbot

2-misolda isbotlangan tengsizlikni qayta yozamiz:

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

Ikkala tomonni 2 ga bo'lamiz:

$$(a + b)^2/2 \leq a^2 + b^2$$

yoki

$$a^2 + b^2 \geq (a + b)^2/2$$

### **Xulosa**

Tengsizlik isbotlandi.

### **5-misol**

Agar  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$  bo'lsa,  $a + b + c$  ning maksimal qiymatini toping.

### **Yechish**

Koshi tengsizligini  $(a, b, c)$  va  $(1, 1, 1)$  ketma-ketliklariga qo'llaymiz:

$$(a + b + c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (1^2 + 1^2 + 1^2)$$

$$(a + b + c)^2 \leq 3 \cdot 3$$

$$(a + b + c)^2 \leq 9$$

Shundan:

$$a + b + c \leq 3$$

### **Javob**

$a + b + c$  ning maksimal qiymati 3 ga teng.

### **6-misol**

Agar  $a^2 + b^2 = 4$  bo'lsa,  $a + 2b$  ifodaning eng katta qiymatini toping.

### **Yechish**

Koshi tengsizligini  $(a, b)$  va  $(1, 2)$  juftliklariga qo'llaymiz:

$$(a \cdot 1 + b \cdot 2)^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (1^2 + 2^2)$$

$$(a + 2b)^2 \leq 4 \cdot 5$$

$$(a + 2b)^2 \leq 20$$

Shundan:

$$a + 2b \leq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

**Javob**

Eng katta qiymat  $2\sqrt{5}$  ga teng.

**7-misol**

Isbotlang:

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Isbot**

Koshi tengsizligini  $(a, b, c)$  va  $(1, 1, 1)$  uchun yozamiz:

$$(a + b + c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (1 + 1 + 1)$$

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Xulosa**

Tengsizlik to'g'ri isbotlandi.

**8-misol**

Agar  $a^2 + b^2 = 10$  bo'lsa,  $a - 3b$  ifodaning maksimal qiymatini toping.

**Yechish**

Koshi tengsizligini  $(a, b)$  va  $(1, -3)$  uchun qo'llaymiz:

$$(a \cdot 1 + b \cdot (-3))^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (1^2 + (-3)^2)$$

$$(a - 3b)^2 \leq 10 \cdot 10$$

$$(a - 3b)^2 \leq 100$$

Shundan:

$$a - 3b \leq 10$$

**Javob**

Maksimal qiymat 10 ga teng.

**9-misol**

Isbotlang ( $a, b > 0$ ):

$$(a^2/b + b^2/a) \geq a + b$$

### **Isbot**

Koshi tengsizligining quyidagi ko'rinishidan foydalanamiz:

$$(a^2/b + b^2/a) \cdot (a + b) \geq (a + b)^2$$

Ikkala tomonni ( $a + b$ ) ga bo'lamiz ( $a + b > 0$ ):

$$a^2/b + b^2/a \geq a + b$$

### **Xulosa**

Tengsizlik isbotlandi.

### **10-misol**

Agar  $a^2 + b^2 + c^2 = 6$  bo'lsa,  $2a + b + c$  ifodaning maksimal qiymatini toping.

### **Yechish**

Koshi tengsizligini ( $a, b, c$ ) va  $(2, 1, 1)$  ketma-ketliklariga qo'llaymiz:

$$(2a + b + c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (2^2 + 1^2 + 1^2)$$

$$(2a + b + c)^2 \leq 6 \cdot 6$$

$$(2a + b + c)^2 \leq 36$$

Shundan:

$$2a + b + c \leq 6$$

### **Javob**

Eng katta qiymat 6 ga teng.