

## 1. Matematika fani olimpiadasida irratsional tenglama va tengsizliklar

### 1.1. Irratsional tenglama tushunchasi

Irratsional tenglama — bu noma'lum qatnashgan ifodalar **ildiz ostida** qatnashgan tenglamadir. Umumiy holda, quyidagi ko'rinishdagi tenglamalar irratsional tenglamalar deyiladi:

$$\begin{aligned}\sqrt{f(x)} &= g(x), \\ \sqrt{f(x)} + \sqrt{h(x)} &= g(x), \\ \sqrt{f(x)} &= \sqrt{h(x)}\end{aligned}$$

bu yerda  $f(x), g(x), h(x)$  — algebraik ifodalar.

Olimpiada masalalarida irratsional tenglamalar ko'pincha **oddiy algebraik tenglamalarga keltiriladi**, biroq bu jarayon **aniqlanish sohasi (AS)** ni qat'iy hisobga olishni talab etadi.

### 1.2. Aniqlanish sohasi (AS) ning ahamiyati

Irratsional tenglamalarda birinchi va eng muhim bosqich — **aniqlanish sohasini aniqlash**.

Agar  $\sqrt{f(x)}$  mavjud bo'lsa, u holda:

$$f(x) \geq 0$$

Agar tenglamada bir nechta ildizli ifodalar mavjud bo'lsa, **barcha ildiz osti ifodalar** uchun mos shartlar bir vaqtda bajarilishi kerak.

Olimpiada masalalarida eng ko'p uchraydigan xato — **AS ni yozmasdan turib kvadratlash**dir. Bu esa **ortiqcha ildizlar** paydo bo'lishiga olib keladi.

### 1.3. Irratsional tenglamalarni yechish usullari

#### 1.3.1. To'g'ridan-to'g'ri kvadratlash usuli

Agar tenglama quyidagi ko'rinishda bo'lsa:

$$\sqrt{f(x)} = g(x),$$

u holda:

1.  $f(x) \geq 0$ ,
2.  $g(x) \geq 0$

shartlari yoziladi va tenglama kvadratlanadi:

$$f(x) = (g(x))^2$$

Bu usul **eng ko‘p qo‘llaniladigan**, lekin **eng ehtiyotkorlikni talab qiladigan** usuldir.

### 1.3.2. Ikkala tomonni bir necha marta kvadratlash

Agar tenglama:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{h(x)} = g(x)$$

ko‘rinishida bo‘lsa, odatda:

1. aniqlanish sohasi yoziladi;
2. bitta ildiz ajratiladi;
3. ketma-ket kvadratlash amalga oshiriladi.

Bu turdagi masalalar olimpiadalarda **texnik jihatdan murakkab**, lekin mantiqan sodda bo‘ladi.

### 1.3.3. Almashtirish (substitutsiya) usuli

Ba‘zi irratsional tenglamalarda:

$$\sqrt{f(x)} = t$$

deb almashtirish kiritish tenglamani **sodda algebraik tenglamaga** keltiradi. Bu usul ayniqsa **simmetrik** masalalarda samarali.

## 1.4. Irratsional tengsizlik tushunchasi

Irratsional tengsizlik — bu noma’lum ildiz ostida qatnashgan tengsizlikdir, masalan:

$$\begin{aligned}\sqrt{f(x)} &\geq g(x), \\ \sqrt{f(x)} &\leq \sqrt{h(x)}\end{aligned}$$

Bu turdagi masalalarda **tengsizlik belgisi yo‘nalishi** juda muhim bo‘lib, kvadratlash faqat **ikkala tomon ham manfiy bo‘lmaganda** ruxsat etiladi.

## 1.5. Irratsional tengsizliklarni yechish prinsiplari

### 1.5.1. Belgilarni tahlil qilish

Masalan:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$$

uchun quyidagi holatlar tekshiriladi:

$$\text{📖 } f(x) \geq 0$$

📖  $g(x) \leq 0$  yoki  $g(x) \geq 0$  holatlar alohida ko'rib chiqiladi

Bu bosqich o'tkazib yuborilsa, yechim **noto'g'ri oraliqlarni** o'z ichiga olishi mumkin.

### 1.5.2. Kvadratlash orqali yechish

Agar ikkala tomon  $\geq 0$  bo'lsa, tengsizlik kvadratlanadi:

$$f(x) \geq (g(x))^2$$

Keyin oddiy algebraik tengsizlik yechiladi va yakunda **AS bilan kesishma** olinadi.

### 1.6. Olimpiada masalalariga xos xususiyatlar

Olimpiadalarda irratsional tenglama va tengsizliklar:

- 📖 bir necha marta kvadratlashni talab qiladi;
- 📖 tenglik va tengsizlikni **birga** ishlatishni talab etadi;
- 📖 grafik yoki baholash g'oyasiga olib keladi;
- 📖 yashirin cheklovlarga ega bo'ladi.

Shu sababli bu mavzu o'quvchilardan:

- 📖 yuqori e'tibor,
- 📖 qat'iy mantiq,
- 📖 tekshirish madaniyatini talab qiladi.

### Xulosa

Irratsional tenglama va tengsizliklar — olimpiada matematikasining muhim bo'limlaridan biri bo'lib, ularni yechishda **aniqlanish sohasi, kvadratlashning oqibatlari** va **yakuniy tekshiruv** hal qiluvchi ahamiyatga ega. Ushbu mavzuni chuqur o'zlashtirish o'quvchining murakkab algebraik masalalarni ishonch bilan yechishiga zamin yaratadi.

## 2. Metodik yordam

### (Irratsional tenglama va tengsizliklarni o'qitish bo'yicha)

#### 2.1. Mavzuni o'qitishda asosiy yondashuv

Irratsional tenglama va tengsizliklar mavzusini o'qitishda o'qituvchi quyidagi ketma-ketlikka amal qilishi maqsadga muvofiq:

1. aniqlanish sohasini aniqlash;
2. tenglama (yoki tengsizlik) tuzilishini tahlil qilish;

3. kvadratlashning qaysi bosqichda mumkinligini aniqlash;
4. olingan algebraik tenglama (yoki tengsizlik)ni yechish;
5. topilgan yechimlarni **AS bilan tekshirish**.

O'quvchilarga ayniqsa **tekshiruv bosqichining** majburiyligi qat'iy singdirilishi kerak.

## 2.2. O'quvchilarda shakllantirilishi zarur bo'lgan ko'nikmalar

O'quvchi:

- 📖 ildiz osti ifodaning ma'nosini tushunishi;
- 📖 kvadratlashdan oldin belgilarni tekshira olishi;
- 📖 ortiqcha ildizlarning qayerdan paydo bo'lishini anglay olishi;
- 📖 tenglama va tengsizlikni bir-biridan aniq farqlashi kerak.

## 2.3. Tipik metodik xatolar (ogohlantirish sifatida)

- 📖 aniqlanish sohasini yozmasdan kvadratlash;
- 📖 tengsizliklarda manfiy sonni kvadratlab belgi saqlanib qoladi deb o'ylash;
- 📖 yakuniy tekshiruvni tashlab ketish;
- 📖 barcha algebraik ildizlarni avtomatik qabul qilish.

Bu xatolar bilan ishlashda **noto'g'ri yechimlarni tahlil qilish** juda samarali metod hisoblanadi.

## 2.4. Oddiy darajadagi misollar (5 ta)

### 1-misol

$$\sqrt{x - 1} = 3$$

**Yechish:**

Aniqlanish sohasi:  $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

Kvadratlaymiz:

$$\begin{aligned} x - 1 &= 9 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Tekshiruv:  $\sqrt{10 - 1} = \sqrt{9} = 3$  — to'g'ri.

**Javob:**  $x = 10$

### 2-misol

$$\sqrt{2x + 1} = 5$$

**Yechish:**

AS:  $2x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1/2$

Kvadratlaymiz:

$$2x + 1 = 25$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

Tekshiruv bajariladi.

**Javob:**  $x = 12$

**3-misol**

$$\sqrt{x} = x - 2$$

**Yechish:**

AS:

$x \geq 0$  va  $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

Kvadratlaymiz:

$$x = (x - 2)^2$$

$$x = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

AS ga mos:  $x = 4$

**Javob:**  $x = 4$

**4-misol**

$$\sqrt{x + 3} = \sqrt{2x - 1}$$

**Yechish:**

AS:

$$x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$$

$$2x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1/2$$

Kvadratlaymiz:

$$x + 3 = 2x - 1$$

$$x = 4$$

**Javob:**  $x = 4$

### 5-misol

$$\sqrt{x - 5} = 0$$

**Yechish:**

$$\text{AS: } x - 5 \geq 0$$

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

**Javob:**  $x = 5$

## 2.5. O'rta darajadagi misollar (5 ta)

### 1-misol

$$\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 1} = 3$$

**Yechish:**

$$\text{AS: } x \geq 1$$

Bitta ildizni ajratamiz:

$$\sqrt{x + 2} = 3 - \sqrt{x - 1}$$

Kvadratlaymiz:

$$x + 2 = 9 - 6\sqrt{x - 1} + x - 1$$

$$6\sqrt{x - 1} = 6$$

$$\sqrt{x - 1} = 1$$

$$x = 2$$

Tekshiruv bajariladi.

**Javob:**  $x = 2$

### 2-misol

$$\sqrt{2x + 3} = \sqrt{x + 1} + 1$$

**Yechish:**

$$\text{AS: } x \geq -1$$

Kvadratlaymiz:

$$2x + 3 = x + 1 + 1 + 2\sqrt{x + 1}$$

$$x + 1 = 2\sqrt{x + 1}$$

Kvadratlaymiz:

$$(x + 1)^2 = 4(x + 1)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = 3 \text{ yoki } x = -1$$

Tekshiruv:

$x = 3$  mos,  $x = -1$  mos emas.

**Javob:**  $x = 3$

### 3-misol

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} = x - 2$$

**Yechish:**

AS:

$$x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

Kvadratlaymiz:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)^2$$

$$x = 2 \text{ yoki } x = 3$$

Tekshiruv:

$x = 2$  mos,  $x = 3$  mos emas.

**Javob:**  $x = 2$

### 4-misol

$$\sqrt{x + 4} \geq x - 2$$

**Yechish:**

AS:  $x \geq -4$

Agar  $x - 2 \leq 0$  bo'lsa, tengsizlik avtomatik bajariladi  $\rightarrow x \leq 2$

Agar  $x - 2 \geq 0$  bo'lsa, kvadratlaymiz:

$$x + 4 \geq (x - 2)^2$$

$$x^2 - 5x \geq 0$$

$$x \leq 0 \text{ yoki } x \geq 5$$

Yechimlarni birlashtiramiz:

$$-4 \leq x \leq 2 \text{ yoki } x \geq 5$$

**5-misol**

$$\sqrt{x-1} \leq \sqrt{2x+2}$$

**Yechish:**

$$\text{AS: } x \geq 1$$

Kvadratlaymiz:

$$x - 1 \leq 2x + 2$$

$$x \geq -3$$

AS bilan kesishma:  $x \geq 1$

**Javob:**  $x \geq 1$