

1. Matematika olimpiadasida modul qatnashgan tenglama va tengsizliklar

1.1. Modul tushunchasi va asosiy xossalari

Haqiqiy son x ning **moduli** $|x|$ quyidagicha aniqlanadi:

$$|x| = x, \text{ agar } x \geq 0$$

$$|x| = -x, \text{ agar } x < 0$$

Demak, modul sonning **nolga bo'lgan masofasini** bildiradi va har doim **manfiy bo'lmagan** qiymatga ega.

Asosiy xossalar:

$$\text{📖 } |x| \geq 0$$

$$\text{📖 } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{📖 } |x|^2 = x^2$$

$$\text{📖 } |ab| = |a| \cdot |b|$$

$$\text{📖 } |a/b| = |a|/|b| \quad (b \neq 0)$$

Bu xossalar modul qatnashgan masalalarda asosiy tayanch bo'lib xizmat qiladi.

1.2. Modul qatnashgan tenglamalar tushunchasi

Modul qatnashgan tenglama — bu noma'lum modul belgisi ichida qatnashgan tenglama bo'lib, umumiy holda quyidagi ko'rinishlarda uchraydi:

$$|f(x)| = a$$

$$|f(x)| = |g(x)|$$

$$|f(x)| + |g(x)| = a$$

bu yerda a — berilgan son yoki ifoda.

Olimpiada masalalarida bunday tenglamalar ko'pincha **bo'laklab yechish** yoki **geometrik talqin** orqali yechiladi.

1.3. $|f(x)| = a$ ko'rinishdagi tenglamalar

Agar $a < 0$ bo'lsa, tenglama **yechimga ega emas**, chunki $|f(x)| \geq 0$.

Agar $a \geq 0$ bo'lsa, tenglama quyidagi ikkita tenglamaga ajraladi:

$$f(x) = a$$

$$f(x) = -a$$

Bu eng oddiy va eng ko'p uchraydigan modul tenglama turidir.

1.4. $|f(x)| = |g(x)|$ ko‘rinishidagi tenglamalar

Bu holda modulni olib tashlash quyidagi ekvivalent tenglamalarga olib keladi:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ f(x) &= -g(x) \end{aligned}$$

Bu turdagi tenglamalar olimpiadalarda **yashirin yechimlar** va **ortiqcha ildizlarni** sinchiklab tekshirishni talab qiladi.

1.5. Bir nechta modul qatnashgan tenglamalar

Tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘lsa:

$$|f(x)| + |g(x)| = a$$

u holda yechimlar soni va turi:

- 📖 a ning qiymatiga;
- 📖 $f(x)$ va $g(x)$ ning nollariga;
- 📖 ularning ishoralariga

bevosita bog‘liq bo‘ladi.

Bunday masalalarda odatda:

- 📖 **sonlar o‘qida ajratish**
- 📖 **holatlar bo‘yicha tahlil qilish**

eng samarali usul hisoblanadi.

1.6. Modul qatnashgan tengsizlik tushunchasi

Modul qatnashgan tengsizliklar quyidagi asosiy turlarga ajraladi:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq a \\ |f(x)| &\geq a \\ |f(x)| &< a \\ |f(x)| &> a \end{aligned}$$

Bu yerda $a \geq 0$ bo‘lishi zarur, aks holda tengsizlik **ma’noga ega bo‘lmaydi**.

1.7. Modul qatnashgan tengsizliklarni yechish prinsiplari

1.7.1. $|f(x)| \leq a$

Bu tengsizlik quyidagicha yoziladi:

$$-a \leq f(x) \leq a$$

Natijada ikki tomonlama tengsizlik hosil bo‘ladi va u oddiy algebraik usullar bilan yechiladi.

1.7.2. $|f(x)| \geq a$

Bu holda:

$$f(x) \leq -a \text{ yoki } f(x) \geq a$$

ya’ni yechimlar **ikki oraliqdan iborat** bo‘ladi.

1.8. Olimpiada masalalariga xos yondashuvlar

Olimpiadalarda modul qatnashgan masalalar:

- 📖 bo‘laklab yechishni;
- 📖 grafik yoki geometrik talqinni;
- 📖 simmetriya va baholash g‘oyalarini;
- 📖 yechimlar sonini tahlil qilishni

talab qiladi.

Ko‘pincha modulni darhol ochish emas, balki **qachon va qayerda ochish** muhim ahamiyatga ega bo‘ladi.

Xulosa

Modul qatnashgan tenglama va tengsizliklar olimpiada matematikasining muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, ular o‘quvchilardan yuqori mantiqiy tahlil, holatlar bo‘yicha ishlash va yakuniy tekshiruv madaniyatini talab qiladi. Ushbu mavzuni chuqur o‘zlashtirish murakkab algebraik masalalarni ishonch bilan yechishga imkon beradi.

2. Metodik yordam

(Modul qatnashgan tenglama va tengsizliklarni olimpiadaga yo‘naltirib o‘qitish)

2.1. Mavzuni o‘qitishda asosiy g‘oya

Modul qatnashgan masalalarda o‘quvchi eng avval **modulni ta’rif bo‘yicha ochish** yoki **standart ekvivalent ko‘rinishlarga keltirishni** o‘rganishi kerak. Olimpiada masalalarida modulni “mexanik” ochish emas, balki **to‘g‘ri joyda va to‘g‘ri holatlar bo‘yicha ochish** hal qiluvchi bo‘ladi.

Tavsiya etiladigan ketma-ketlik:

1. masala turini aniqlash: $|f(x)| = a$, $|f(x)| \leq a$, $|f(x)| \geq a$, yoki bir nechta modul;
2. zarur bo'lsa a ning ishorasini tekshirish ($a < 0$ bo'lsa yechim yo'q);
3. modul ichidagi ifodalar nollari bo'yicha sonlar o'qini bo'lish;
4. har bir oraliqda modulni ishora bo'yicha ochib yechish;
5. yakuniy yechimlarni tekshirish va birlashtirish.

2.2. Standart ekvivalent o'tishlar (o'qituvchi uchun tayanch)

📖 $|f(x)| = a$

$a < 0$ bo'lsa yechim yo'q; $a \geq 0$ bo'lsa $f(x) = a$ yoki $f(x) = -a$

📖 $|f(x)| \leq a$

$a < 0$ bo'lsa yechim yo'q; $a \geq 0$ bo'lsa $-a \leq f(x) \leq a$

📖 $|f(x)| \geq a$

$a < 0$ bo'lsa barcha x yechim; $a \geq 0$ bo'lsa $f(x) \leq -a$ yoki $f(x) \geq a$

Bu uch "ko'rinish" o'quvchining qo'lida mustahkam bo'lsa, masalalarning katta qismi osonlashadi.

2.3. O'quvchilarda shakllantiriladigan ko'nikmalar

📖 Modulning geometrik ma'nosi: $|x - a|$ — bu x ning a nuqtadan masofasi.

📖 Sonlar o'qida "bo'linish nuqtalari"ni to'g'ri tanlash: $f(x) = 0$ bo'ladigan joylar.

📖 "Oraliq bo'yicha yechish" va "yechimlarni birlashtirish" madaniyati.

📖 Har bir holatda olingan yechimning o'sha holatga mosligini tekshirish.

2.4. Tipik xatolar

- $|f(x)| = a$ ni faqat $f(x) = a$ deb yechib qo'yish;
- $|f(x)| \leq a$ da ikki tomonlama tengsizlikni noto'g'ri yozish;
- modul ichidagi ifodalar nollarini hisobga olmasdan holatlarni tanlash;
- bir nechta modulda oraliqlarni noto'g'ri bo'lish;
- yechimlarni birlashtirishda oraliqlarni tushirib qoldirish.

2.5. Oddiy darajadagi misollar (5 ta)

1-misol

Tenglamani yeching: $|x - 3| = 5$

Yechish:

$$|x - 3| = 5 \rightarrow x - 3 = 5 \text{ yoki } x - 3 = -5$$

$$x = 8 \text{ yoki } x = -2$$

Javob: $x = -2, 8$

2-misol

Tenglamani yeching: $|2x + 1| = 7$

Yechish:

$$2x + 1 = 7 \text{ yoki } 2x + 1 = -7$$

$$2x = 6 \rightarrow x = 3$$

$$2x = -8 \rightarrow x = -4$$

Javob: $x = -4, 3$

3-misol

Tenglamani yeching: $|x| = 4$

Yechish:

$$x = 4 \text{ yoki } x = -4$$

Javob: $x = -4, 4$

4-misol

Tengsizlikni yeching: $|x - 2| < 3$

Yechish:

$$|x - 2| < 3 \rightarrow -3 < x - 2 < 3$$

Har tomonga 2 qo'shamiz:

$$-1 < x < 5$$

Javob: $-1 < x < 5$

5-misol

Tengsizlikni yeching: $|x + 1| \geq 4$

Yechish:

$$|x + 1| \geq 4 \rightarrow x + 1 \leq -4 \text{ yoki } x + 1 \geq 4$$

$$x \leq -5 \text{ yoki } x \geq 3$$

Javob: $x \leq -5 \text{ yoki } x \geq 3$

2.6. O'rta darajadagi misollar (5 ta)

1-misol

Tenglamani yeching: $|x - 1| + |x + 2| = 5$

Yechish:

Bo‘linish nuqtalari: $x = 1$ va $x = -2$. Shuning uchun 3 ta oraliq:

1) $x \geq 1$:

$$|x - 1| = x - 1, |x + 2| = x + 2$$

$$(x - 1) + (x + 2) = 5$$

$$2x + 1 = 5 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

$x \geq 1$ ga mos.

2) $-2 \leq x < 1$:

$$|x - 1| = 1 - x, |x + 2| = x + 2$$

$$(1 - x) + (x + 2) = 5$$

$3 = 5$ — mumkin emas, yechim yo‘q.

3) $x < -2$:

$$|x - 1| = 1 - x, |x + 2| = -x - 2$$

$$(1 - x) + (-x - 2) = 5$$

$$-2x - 1 = 5 \rightarrow -2x = 6 \rightarrow x = -3$$

$x < -2$ ga mos.

Javob: $x = -3, 2$

2-misol

Tenglamani yeching: $|2x - 3| = |x + 4|$

Yechish:

$$|A| = |B| \rightarrow A = B \text{ yoki } A = -B$$

1) $2x - 3 = x + 4$

$$x = 7$$

2) $2x - 3 = -(x + 4)$

$$2x - 3 = -x - 4$$

$$3x = -1$$

$$x = -1/3$$

Javob: $x = -1/3, 7$

3-misol

Tengsizlikni yeching: $|x - 1| \leq 2x + 3$

Yechish:

Modul chap tomonda, shuning uchun avval o‘ng tomon manfiy bo‘lsa tekshiramiz.

Agar $2x + 3 < 0$ bo'lsa ($x < -3/2$), u holda $|x - 1| \geq 0$, demak $|x - 1| \leq 2x + 3$ bajarilmaydi.

Shuning uchun $x \geq -3/2$ bo'lishi shart.

Endi $x \geq -3/2$ da ekvivalent yozamiz:

$$|x - 1| \leq 2x + 3 \rightarrow -(2x + 3) \leq x - 1 \leq 2x + 3$$

Chap tengsizlik:

$$-2x - 3 \leq x - 1$$

$$-3 \leq 3x - 1$$

$$-2 \leq 3x$$

$$x \geq -2/3$$

O'ng tengsizlik:

$$x - 1 \leq 2x + 3$$

$$-1 \leq x + 3$$

$$x \geq -4$$

Endi barcha shartlarni kesishamiz:

$$x \geq -3/2, x \geq -2/3, x \geq -4$$

$$\text{Natija: } x \geq -2/3$$

$$\text{Javob: } x \geq -2/3$$

4-misol

Tenglamani yeching: $|x - 4| = x + 2$

Yechish:

O'ng tomon modulga teng bo'layotgani uchun avval $x + 2 \geq 0$ bo'lishi kerak $\rightarrow x \geq -2$.

Endi holatlar:

1) $x \geq 4$:

$$|x - 4| = x - 4$$

$$x - 4 = x + 2$$

$$-4 = 2 \text{ — mumkin emas.}$$

2) $x < 4$:

$$|x - 4| = 4 - x$$

$$4 - x = x + 2$$

$$2 = 2x$$

$$x = 1$$

Tekshiruv: $|1 - 4| = 3, 1 + 2 = 3$ — mos.

Javob: $x = 1$

5-misol

Tengsizlikni yeching: $|x - 3| + |x + 1| \geq 6$

Yechish:

Bo'linish nuqtalari: $x = 3$ va $x = -1$.

1) $x \geq 3$:

$$|x - 3| = x - 3, |x + 1| = x + 1$$

$$(x - 3) + (x + 1) \geq 6$$

$$2x - 2 \geq 6$$

$$2x \geq 8$$

$$x \geq 4$$

2) $-1 \leq x < 3$:

$$|x - 3| = 3 - x, |x + 1| = x + 1$$

$$(3 - x) + (x + 1) \geq 6$$

$$4 \geq 6 \text{ — mumkin emas.}$$

3) $x < -1$:

$$|x - 3| = 3 - x, |x + 1| = -x - 1$$

$$(3 - x) + (-x - 1) \geq 6$$

$$2 - 2x \geq 6$$

$$-2x \geq 4$$

$$x \leq -2$$

Endi yechimlarni birlashtiramiz:

$$x \leq -2 \text{ yoki } x \geq 4$$

Javob: $x \leq -2$ yoki $x \geq 4$