

## Masalalar yechimlari

### 1-masala yechimi

$$x^2 - 2ax + a + 1 = 0$$

Ikki turli haqiqiy ildiz bo'lishi uchun  $D > 0$ :

$$D = (-2a)^2 - 4(a + 1) = 4(a^2 - a - 1)$$

$$D > 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 > 0$$

Bu esa:  $a < (1 - \sqrt{5})/2$  yoki  $a > (1 + \sqrt{5})/2$ .

Ildizlar **ikkalasi ham musbat** bo'lishi uchun (Vieta):

$$x_1 + x_2 = 2a > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

$$x_1 x_2 = a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$$

$a > 0$  sharti  $a > -1$  ni o'z ichiga oladi. Endi  $D > 0$  bilan birlashtiramiz:

$a > 0$  va  $(a < (1 - \sqrt{5})/2$  yoki  $a > (1 + \sqrt{5})/2$ )

$a > 0$  bo'lgani uchun faqat:

$$a > (1 + \sqrt{5})/2$$

**Javob:**  $a > (1 + \sqrt{5})/2$

### 2-masala yechimi

$$x^2 + 2ax + 5 \geq 4x$$

hammasini bir tomonga o'tkazamiz:

$$x^2 + 2(a - 2)x + 5 \geq 0$$

Bu parabola yuqoriga ochilgan. Barcha  $x$  lar uchun  $\geq 0$  bo'lishi uchun diskriminant  $D \leq 0$ :

$$D = (2(a - 2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$

$$D = 4(a - 2)^2 - 20 \leq 0$$

$$(a - 2)^2 \leq 5$$

**Javob:**  $2 - \sqrt{5} \leq a \leq 2 + \sqrt{5}$

### 3-masala yechimi

$$(x - a)/(x + 1) = (a + 1)/(x - a)$$

Cheklovlar:  $x \neq -1$  va  $x \neq a$ .

Ko'paytiramiz:

$$(x - a)^2 = (a + 1)(x + 1)$$

Ochamiz:

$$x^2 - 2ax + a^2 = (a + 1)x + (a + 1)$$

Bir tomonga yig'amiz:

$$x^2 - (3a + 1)x + (a^2 - a - 1) = 0$$

Ikki turli haqiqiy yechim bo'lishi uchun diskriminant  $> 0$ :

$$\begin{aligned}\Delta &= (3a + 1)^2 - 4(a^2 - a - 1) \\ \Delta &= 9a^2 + 6a + 1 - 4a^2 + 4a + 4 \\ \Delta &= 5a^2 + 10a + 5 \\ \Delta &= 5(a + 1)^2\end{aligned}$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow a \neq -1.$$

Endi cheklovlarni tekshiramiz:  $x = a$  yoki  $x = -1$  yechim bo'lib qolmasligi kerak.

Kvadrat tenglamaga  $x = a$  qo'ysak:

$$a^2 - (3a + 1)a + (a^2 - a - 1) = -(a + 1)^2$$

Bu 0 faqat  $a = -1$  da.

$x = -1$  qo'ysak:

$$1 - (3a + 1)(-1) + (a^2 - a - 1) = (a + 1)^2$$

Bu ham 0 faqat  $a = -1$  da.

Demak,  $a \neq -1$  bo'lganda cheklovlar avtomatik bajariladi va tenglama 2 ta turli haqiqiy yechimga ega bo'ladi.

**Javob:**  $a \neq -1$

#### 4-masala yechimi

$$\sqrt{x + a} = x - 1$$

Aniqlanish shartlari:

$$x + a \geq 0 \text{ va } x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \text{ va } x \geq -a$$

demak  $x \geq \max(1, -a)$ .

Kvadratlaymiz:

$$\begin{aligned}x + a &= (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 3x + (1 - a) &= 0\end{aligned}$$

Diskriminant:

$$D = 9 - 4(1 - a) = 5 + 4a$$

Haqiqiy ildiz bo'lishi uchun:  $5 + 4a \geq 0 \rightarrow a \geq -5/4$ .

Endi yechimlar sonini tekshiramiz.

$a > -1$  bo'lsa,  $(3 - \sqrt{5 + 4a})/2 < 1$  bo'lib qoladi, shuning uchun faqat kattaroq ildiz  $x \geq 1$  ni qanoatlantiradi  $\rightarrow$  **aniq bitta** yechim.

$a = -1$  bo'lsa, ildizlar  $x = 1$  va  $x = 2$  chiqadi  $\rightarrow$  **ikki yechim**.

$-5/4 < a < -1$  bo'lsa, ikkala ildiz ham  $x \geq 1$  va  $x \geq -a$  shartlarni qanoatlantiradi  $\rightarrow$  **ikki yechim**.

$a = -5/4$  bo'lsa,  $D = 0$  bo'ladi, ya'ni bitta (ikkilangan) ildiz mavjud  $\rightarrow$  **aniq bitta** yechim.

Shunday qilib, aniq bitta yechim bo'ladigan parametrlar:

**Javob:**  $a = -5/4$  yoki  $a > -1$

### 5-masala yechimi

$$|x - a| = |x| + 1$$

Chap tomondan o'ng tomonni ayiramiz:

$$|x - a| - |x| = 1$$

Ma'lum baho:

$$||x - a| - |x|| \leq |a|$$

Shuning uchun 1 ga teng bo'lishi uchun zarur shart:

$$1 \leq |a|$$

Endi bu shart yetarliligini ko'rsatamiz.

➤ Agar  $a \geq 1$  bo'lsa,  $0 \leq x \leq a$  oraliqda:  $|x - a| = a - x$ ,  $|x| = x$ .

$$a - x = x + 1 \rightarrow 2x = a - 1 \rightarrow x = (a - 1)/2$$

Bu  $x$  haqiqatan ham  $0 \leq x \leq a$  shartni qanoatlantiradi.

➤ Agar  $a \leq -1$  bo'lsa,  $a \leq x \leq 0$  oraliqda:  $|x - a| = x - a$ ,  $|x| = -x$ .

$$x - a = -x + 1 \rightarrow 2x = a + 1 \rightarrow x = (a + 1)/2$$

Bu  $x$  ham  $a \leq x \leq 0$  shartga mos.

Demak,  $|a| \geq 1$  bo'lsa, albatta yechim mavjud;  $|a| < 1$  bo'lsa, yechim yo'q.

**Javob:**  $|a| \geq 1$